MÉTODO SIMPLEX
QUADRO SIMPLEX

O Método Simplex é um procedimento matricial para resolver o modelo de programação linear na forma normal.
Começando com $\mathbf{X_0}$, o método localiza sucessivamente outras soluções básicas viáveis acarretando melhores valores para a função objetivo até ser obtida a solução ótima.
Para os problemas de **minimização**, o método simplex utiliza o Quadro abaixo.

	$\mathbf{X^T}$ $\mathbf{C^T}$	
$\mathbf{X_0}$ $\mathbf{C_0}$	**A**	**B**
	$C^T - C_0^T A$	$-C_0^T B$

Para os problemas de **maximização** o Quadro acima é aplicado desde que os elementos da linha inferior sejam colocados com sinal invertido.
Uma vez obtida esta ultima linha do Quadro, a segunda linha e a segunda coluna do Quadro, correspondentes a C^T e C_0, respectivamente, tornam-se supérfluas e podem ser eliminadas.

$\mathbf{C^T}$: vetor linha dos custos correspondentes.
X : é o vetor coluna de incógnitas (incluindo variáveis de folga, excesso e artificiais).
A : é a matriz de coeficientes das equações de restrições.
B : é o vetor coluna dos valores à direita das equações representando as restrições.
$\mathbf{X_0}$**:** é o vetor coluna de variáveis de folga e artificiais
$\mathbf{C_0}$: é o vetor coluna de custo associado com as variáveis em $\mathbf{X_0}$

Exemplo:

Minimizar: $z = 80x_1 + 60x_2$

Sujeito a : $0{,}20x_1 + 0{,}32x_2 \leq 0{,}25$

$x_1 + x_2 = 1$

com: x_1 e x_2 não negativos

Adicionando uma variável de folga x_3 e uma variável artificial x_4, respectivamente, as primeira e segunda restrições.

Minimizar: $z = 80x_1 + 60x_2 + 0x_3 + Mx_4$

$$\begin{aligned} 0{,}20x_1 + 0{,}32x_2 + x_3 \quad &= 0{,}25 \\ x_1 + x_2 \quad +x_4 &= 1 \end{aligned}$$

com todas as variáveis não negativas

Passando para forma normal matricial

$$\mathbf{X} \equiv [\, x_1 , x_2 , x_3 , x_4 \,]^T \qquad \mathbf{C} \equiv [\, 80 , 60 , 0 , M \,]^T$$

$$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} 0{,}20 & 0{,}32 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} \equiv \begin{bmatrix} 0{,}25 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X_0} \equiv \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$C^T - C_0^T A = [\, 80 , 60 , 0 , M \,] - [\, 0 ,\ M \,] \begin{bmatrix} 0{,}20 & 0{,}32 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\, 80 , 60 , 0 , M \,] - [\, 0 + M , 0 + M , 0 , M \,]$$

$$[\, 80 , 60 , 0 , M \,] - [\, M ,\ M , 0 , M \,]$$

$$[\, 80 - M , 60 - M , 0 , 0 \,]$$

$$-C_0^T B = -[\, 0 , M \,] \begin{bmatrix} 0{,}25 \\ 1 \end{bmatrix} = -M$$

<u>QUADRO SIMPLEX</u>

	X_1 80	X_2 60	X_3 0	X_4 M	
X_3 0	0,20	0,32	1	0	0,25
X_4 M	1	1	0	1	1
	80-M	60-M	0	0	-M

Exercício:

Maximizar: $z = x_1 + 9x_2 + x_3$

sujeito a:
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 15$$

com: todas as variáveis não negativas

<u>Passando para forma Matricial</u>

$\mathbf{X} \equiv [\, x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 \,]^{\mathbf{T}}$ $\quad$ $\mathbf{C} \equiv [\, 1 , 9 , 1 , 0 , 0 \,]^{\mathbf{T}}$

$$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} \equiv \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X_0} \equiv \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

QUADRO SIMPLEX

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
	1	9	1	0	0	
X_4 0	1	2	3	1	0	9
X_5 0	3	2	2	0	1	15

QUADRO 1 (Quadro inicial completo)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
X_4	1	2	3	1	0	9
X_5	3	2	2	0	1	15
	-1	-9	-1	0	0	0

$-C_0^T B$

$C^T - C_0^T A$

O MÉTODO SIMPLEX

Passo 1 Localize o número mais negativo da última linha do quadro simplex, excluída a última coluna, e chame a coluna em que este número aparece de **coluna de trabalho**. Se existir mais de um candidato a número mais negativo, escolha um.

Passo 2 Forme quocientes da divisão de cada número positivo da coluna de trabalho pelo elemento da última coluna da linha correspondente (excluindo-se a última linha do quadro).Designe por pivô o elemento da coluna de trabalho que conduz ao menor quociente. Se mais de um elemento conduzir ao mesmo menor quociente, escolha um. Se nenhum elemento da coluna de trabalho for positivo, o problema não terá solução.

Passo 3 Use operações elementares sobre as linhas a fim de converter o elemento pivô em 1 e, em seguida, reduzir a zero todos os outros elementos da coluna de trabalho.

Passo 4 Substitua a variável **x** existente na linha pivô e primeira coluna pela variável **x** da primeira linha e coluna pivô. Esta nova primeira coluna é o novo conjunto de variáveis básicas.

Passo 5 Repita os passos de 1 a 4 até a inexistência de números negativos na última linha, excluindo-se desta apreciação a última coluna.

Passo 6 A solução ótima é obtida atribuindo-se a cada variável da primeira coluna o valor da linha correspondente, na última coluna. Às demais variáveis é atribuído o valor zero. O valor ótimo da função objetivo, associado a **Z,** é o número resultante na última linha, última coluna, nos problemas de maximização ou o negativo deste número, nos problemas de minimização.

Passo 1

Coluna de trabalho

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
X_4	1	2	3	1	0	9
X_5	3	2	2	0	1	15
	-1	**-9**	-1	0	0	0

Mais negativo

Passo 2

Coluna de trabalho

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
X_4	1	**2***	3	1	0	9
X_5	3	2	2	0	1	15
	-1	-9	-1	0	0	0

Pivô

9/2 = 4,5

15/2 = 7,5

Passo 3a

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
X_4	1/2	1^*	3/2	1/2	0	9/2
X_5	3	2	2	0	1	15
	-1	-9	-1	0	0	0

Multiplicando todos os elementos da linha do Pivô, pelo inverso do Pivô.
Lembrar que o inverso de 2 é 1/2 , o inverso de 3/4 é 4/3.

Passo 3b

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
X_4	1/2	1^*	3/2	1/2	0	9/2
X_5	3	2	2	0	1	15
	7/2	**0**	**25/2**	**9/2**	**0**	**81/2**

Reduzindo a zero o elemento -9: Multiplica-se por 9 a linha que contem o Pivô, em seguida faça uma soma algébrica com a linha que contem o elemento -9

9 x 1/2 = 9/2	9/2 + (-1) = **7/2**
9 x 1 = 9	9 + (-9) = **0**
9 x 3/2 = 27/2	27/2 + (-1) = **25/2**
9 x 1/2 = 9/2	9/2 + 0 = **9/2**
9 x 0 = 0	0 + 0 = **0**
9 x 9/2 = 81/2	81/2 + 0 = **81/2**

Passo 3c

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
X_4	1/2	1^*	3/2	1/2	0	9/2
X_5	**2**	**0**	**-1**	**-1**	**1**	**6**
	7/2	0	25/2	9/2	0	81/2

Reduzindo a zero o elemento 2: Multiplica-se por -2 a linha que contem o Pivô, em seguida faça uma soma algébrica com a linha que contem o elemento 2

Passo 4

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
X_2	1/2	1	3/2	1/2	0	9/2
X_5	2	0	-1	-1	1	6
	7/2	0	25/2	9/2	0	81/2

Passo 5

Não é necessário aplicar, pois não existe números negativos na última linha.

Passo 6

$X_2 = 9/2$, $X_5 = 6$, $X_1 = X_3 = X_4 = 0$

$Z = 81/2$

Exercício para o Lar:

Problema da fabrica de rádios.

Maximizar: $z = 30ST + 40LX$ (obs: faça $ST = X_1$ e $LX = X_2$)

Sujeito a: $ST \leq 24$
$LX \leq 16$
$ST + 2LX \leq 40$

Sendo ST e LX variáveis inteiras e positivas